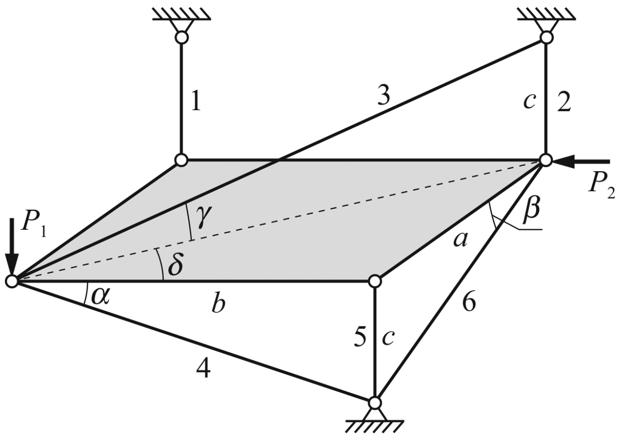
STATYKA



Zadanie 1.

Jednorodna prostokątna płyta o ciężarze G jest utrzymywana w równowadze (w położeniu poziomym) za pomocą sześciu nieważkich prętów zamocowanych przegubowo. Napisać równania równowagi układu.

Rozwiązanie:

$$\sum_i F_{xi} = -S_3 \cos\gamma \sin\delta + S_6 \cos\beta = 0$$

$$\sum_i F_{yi} = S_3 \cos\gamma \cos\delta + S_4 \cos\alpha - P_2 = 0$$

$$\sum_i F_{zi} = S_1 + S_2 + S_3 \sin\gamma - S_4 \sin\alpha - S_5 - S_6 \sin\beta - P_1 - G = 0$$

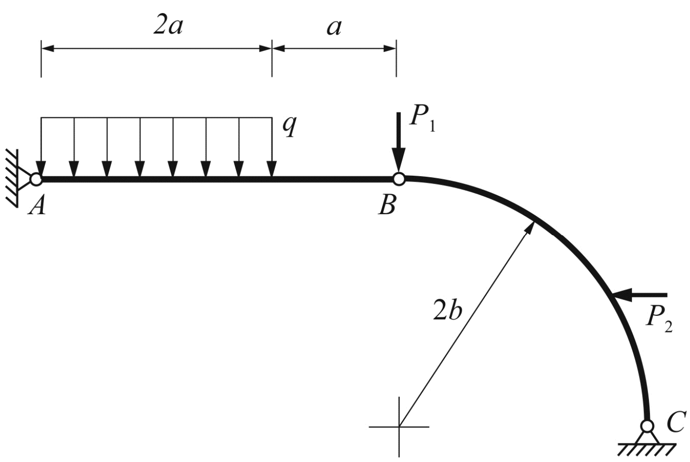
$$\sum_i M_{xi} = S_2 b - S_5 b - S_6 \sin\beta \; b - G\frac{b}{2} = 0$$

$$\sum_i M_{yi} = -S_3 \sin\gamma \; a + S_4 \sin\alpha \; a + S_5 a + P_1 a + G\frac{a}{2} = 0$$

$$\sum_i M_{zi} = S_3 \cos\gamma \cos\delta \; a + S_4 \cos\alpha \; a - S_6 \cos\beta \; b = 0$$

Uwagi:

1) Założono rozciąganie we wszystkich prętach.
2) Początek prawoskrętnego układu współrzędnych przyjęto w przegubie łączącym płytę z prętem nr 1; oś x skierowano wzdłuż krawędzi płyty o długości a.



Zadanie 2.

Dwa pręty połączone są przegubem B i zamocowane do podłoża za pomocą dwóch podpór przegubowych. Napisać równania równowagi układu. Ciężar własny obu ciał pominąć.

Równania równowagi dla pręta *AB*:

$$\sum_i F_{xi} = H_A + H_B = 0$$

$$\sum_i F_{yi} = V_A + V_B - 2qa - P_1 = 0$$

$$\sum_i M_{Ai} = -2qa^2 - 3P_1 a + 3V_B a = 0$$

Równania równowagi dla pręta *BC*:

$$\sum_i F_{xi} = -H_B + H_C - P_2 = 0$$

$$\sum_i F_{yi} = -V_B + V_C = 0$$

$$\sum_i M_{Bi} = -P_2 b + 2V_C b + 2H_C b = 0$$

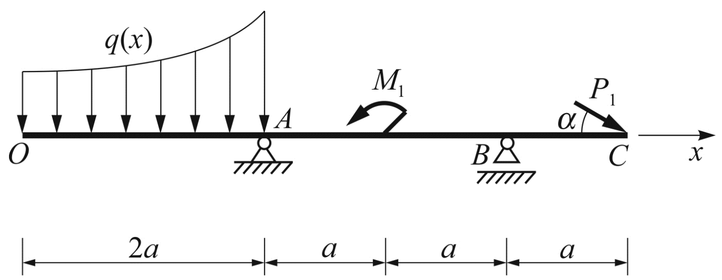
Uwagi:
1) Siły reakcji podpór skierowano w prawo i w górę.
2) Siły H_B i V_B skierowano odpowiednio w prawo i w górę w przypadku pręta AB.

Zadanie 3.

Belkę zamocowano do podłoża za pomocą dwóch podpór przegubowych. Obciążenie ciągłe określone jest wzorem:

$$q(x) = q_0 e^{x/a},$$

przy czym q_0 = const, a współrzędna x odmierzana jest od lewego końca belki (punkt O). Napisać równania równowagi układu. Ciężar własny belki pominąć.



Wypadkowa obciążenia ciągłego:

$$Q = q_0 a\,(e^2 - 1)$$

Punkt przyłożenia wypadkowej:

$$x_Q = a\,\frac{e^2+1}{e^2-1}$$

Równania równowagi:

$$\sum_i F_{xi} = H_A + P_1\cos\alpha = 0$$

$$\sum_i F_{yi} = V_A + V_B - Q - P_1 \sin\alpha = 0$$

$$\sum_i M_{Ai} = Q(2a - x_Q) + 2V_B a - 3P_1 a \sin\alpha + M_1 = 0$$

Uwagi:
Siły reakcji podpór skierowano w prawo i w górę.

KINEMATYKA

Zadanie 1.

Punkt materialny porusza się w jednej płaszczyźnie zgodnie z kinematycznymi równaniami ruchu:

$$x(t) = 4b\,(\omega t)^2 - 3b \qquad y(t) = 2b\omega t\,,$$

gdzie $b = 1$ cm, $\omega = 1/4$ rad/s, t – czas ($t \geq 0$). Określić położenie punktu w chwili $t = 0$ oraz tor ruchu. Wyznaczyć prędkość punktu oraz składową styczną i normalną przyspieszenia, a także promień krzywizny toru w chwili $t_1 = 2$ s.

Rozwiązanie:

Położenie punktu w chwili $t = 0$: $A_0 = (-3b;\, 0) = (-3;\, 0)$

Tor ruchu: parabola o równaniu $x = \dfrac{y^2}{b} - 3b$

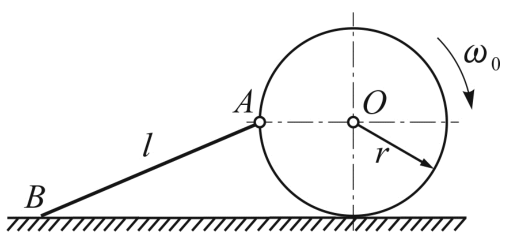
Prędkość:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}, \qquad v = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$$

Przyspieszenie:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{e}_s + \frac{\sqrt{5}}{10}\mathbf{e}_n, \qquad a = \frac{1}{2} \quad \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right]$$

Promień krzywizny toru: $\rho = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ [cm]



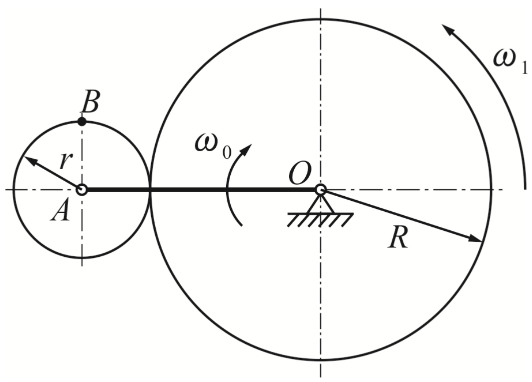
Zadanie 2.

Koło o promieniu r toczy się bez poślizgu ze stałą prędkością kątową ω_0. Do koła w punkcie A zamocowano przegubowo pręt o długości $l = 3r$, którego koniec B ślizga się po podłożu. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu B oraz prędkość kątową i przyspieszenie kątowe pręta.

Rozwiązanie:

$$\mathbf{v}_A = \omega_0 r\,\mathbf{i} + \omega_0 r\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{v}_B = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\omega_0 r\,\mathbf{i}, \qquad \boldsymbol{\omega}_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}\omega_0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_A = \omega_0^2 r\,\mathbf{i}, \qquad \mathbf{a}_B = \left(1 + \frac{9\sqrt{2}}{32}\right)\omega_0^2 r\,\mathbf{i}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{32}\omega_0^2\mathbf{k}$$



Zadanie 3.

Koło o promieniu $R = 4r$ obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega_1 = 2\omega_0$. Bez poślizgu toczy się po nim mniejsze koło o promieniu r. Środki obu kół połączono za pomocą korby, która obraca się ze stałą prędkością kątową ω_0. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktów A i B oraz prędkość kątową mniejszego koła.

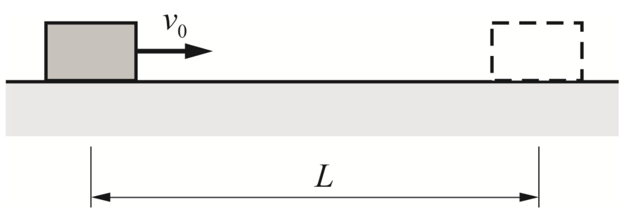
Rozwiązanie:

$\mathbf{v}_A = 5\omega_0 r\,\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_B = 13\omega_0 r\,\mathbf{i} + 5\omega_0 r\,\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\omega}_2 = -13\omega_0\mathbf{k}$

$\mathbf{a}_A = 5\omega_0^2 r\,\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_B = 5\,\omega_0^2 r\,\mathbf{i} - 169\omega_0^2 r\,\mathbf{j}$, $\varepsilon_{AB} = 0$

DYNAMIKA

Zadanie 1.



Ciału o masie $m = 5$ kg nadano prędkość początkową $v_0 = 12$ m/s, w wyniku czego ślizga się po poziomej chropowatej powierzchni. Jaką drogę L przebędzie ciało do chwili zatrzymania, jeśli współczynnik tarcia $\mu = 0.3$, a ponadto na ciało działa zależna od czasu siła oporu:

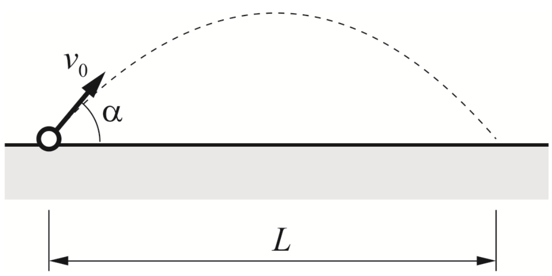
$$F_R = ct\,,$$

gdzie współczynnik oporu $c = 0.8$ N/s?

Rozwiązanie:

$L = x_{\max} \approx 22.9$ [m], $t_{\max} \approx 3.7$ [s]

Zadanie 2.

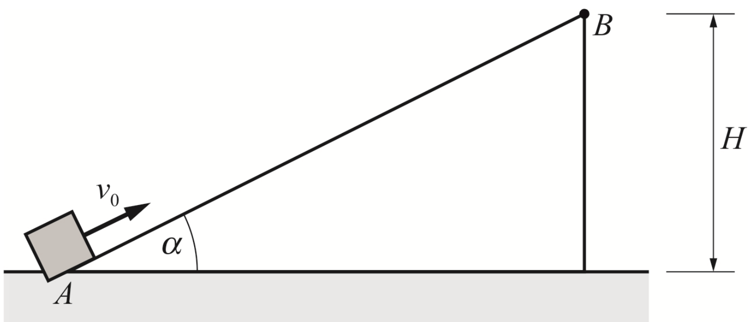


Pod jakim kątem α należy wyrzucić piłkę o masie $m = 0.5$ kg z prędkością $v_0 = 30$ m/s, aby upadła na ziemię w odległości $L = 70$ m? Po jakim czasie ciało spadnie na ziemię i jaką maksymalną wysokość osiągnie podczas lotu? Pominąć wszelkie opory ruchu.

Rozwiązanie:

$\alpha \approx 24.87°$, $t_{\max} \approx 2.57$ [s], $H \approx 8.11$ [m]

Zadanie 3.



Jaką prędkość początkową v_0 należy nadać ciału o masie $m = 2$ kg, aby zatrzymało się w punkcie B równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ i wysokości $H = 3$ m? Współczynnik tarcia między ciałem a równią wynosi $\mu = 0.2$.

Rozwiązanie:

$v_0 \approx 8.9$ [m/s]