

*We would all be better off if more people realised
that simple nonlinear systems
do not necessarily possess simple dynamical properties.*

*Byłoby dla nas wszystkich lepiej, gdyby więcej ludzi
zdało sobie sprawę, że proste układy nieliniowe
niekoniecznie mają proste własności dynamiczne.¹*

Lord Robert May (1976)

O chaosie deterministycznym

Paweł Fritzkowski

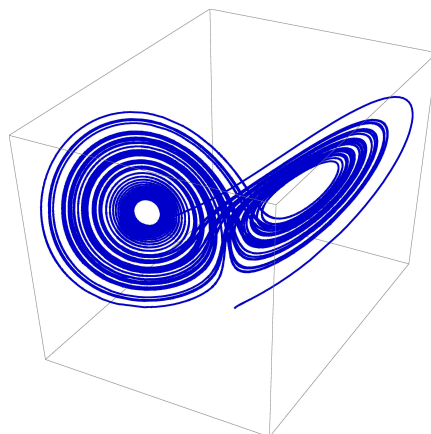
1. Wprowadzenie

Wśród przedstawicieli nauk ścisłych i technicznych truizmem jest twierdzenie, że świat z natury jest nieliniowy. W ostatnich dekadach zdecydowanie zmieniła się optyka patrzenia na świat fizyczny, a przebrzmiała regularność i przewidywalność przyćmiła *chaotyczność*. Nauki stosowane, których celem jest zrozumienie i prognozowanie konkretnych zjawisk, akcentują bliższe rzeczywistości modele nieliniowe. W przypadku procesów zmiennych w czasie (niestacjonarnych) oznacza to konieczność zmierzenia się z *chaosem deterministycznym*.

Chaos jest immanentną własnością *nieliniowych układów dynamicznych*, co stawia w centrum dziedzinę zwaną *dynamiką nieliniową*. Przede wszystkim należy podkreślić jej interdyscyplinarność wynikającą z faktu, iż samo pojęcie *układu dynamicznego* jest dziś bardzo szerokie i odbiega znacznie od mechanicznego, newtonowskiego pierwowzoru. Jak podają Bronsztejn i inni, „układem dynamicznym nazywamy matematyczny model służący do opisu ewolucji czasowej fizycznych, biologicznych i innych realnie istniejących struktur” [7]. Definicję tę spełnia zarówno model odbicia kuli bilardowej, oscylacji obwodów elektrycznych, model opisujący pogodę lub dynamikę populacji zwierząt. Z tej perspektywy chaos jest cechą uniwersalną, ujawniającą się w układzie nieliniowym bez względu na jego naturę czy fizyczny sens. Matematycznie wyróżnia się *układy dynamiczne ciągłe* i *dyskretnie*, których ewolucję opisuje się odpowiednio równaniami różniczkowymi lub różnicowymi. Formalne definicje wymienionych pojęć można znaleźć w pracach [7, 14].

Dynamikę nieliniową utożsamia się często z *teorią chaosu*, choć ta pierwsza jest obszarem szerszym, związanym również m.in. z teorią stabilności i teorią bifurkacji. Niemniej, owo efektowne miano przeniknęło do popkultury, podobnie jak pewne kluczowe

¹ Cytat za Smith L.A., *Chaos: A Very Short Introduction* [21]; przekład własny



Rys. 1. Atraktor Lorentza

hasła czy idee, pomimo ich na wskroś matematycznej proveniencji. Symbolem czy emblematem teorii chaosu stał się dwupłatowy *atraktor Lorentza* (rys. 1), a termin *efekt motyla* przeistoczył się w dość pospolity slogan. Jednak dogłębne zrozumienie tych terminów – i istoty chaosu w ogóle – nie wydaje się zbyt powszechne.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie podstawowych zagadnień dotyczących chaosu deterministycznego. Formalizm matematyczny ograniczono tu do minimum, a zasadnicze koncepcje osadzono w kontekście historycznym. Podjęto też próbę odpowiedzi na pytania kluczowe dla zrozumienia omawianej tematyki, a rzadko poruszane w literaturze fachowej. Czy *determinizm* oznacza to samo, co *przewidywalność*? Jakie znaczenie mają dziś teorie liniowe wobec nieliniowej rzeczywistości? Czy określenie *deterministyczny* nie kłóci się z pojęciem chaosu?

Liczba prac poświęconych dynamice nieliniowej jest ogromna, stąd uporządkowanie i zwięzłe omówienie nawet najistotniejszych tylko kwestii jest zadaniem trudnym. Na tej drodze szczególnie pomocne okazują się książki o charakterze popularnonaukowym. Swą przystępnością i historycznym ujęciem zwracają uwagę prace Stewarta *Czy Bóg gra w kości* [22] i *Oswajanie nieskończoności* [23], a także książka Smitha z oksfordzkiej serii *Very Short Introductions* [21]. Idee dotyczące chaosu i złożoności w interesujący sposób wyłożono w *Załamaniu chaosu* [9]. Natomiast pełnię matematycznego spojrzenia na dynamikę chaotyczną odnaleźć można w *Nowoczesnym kompendium matematyki* [7] i podręczniku autorstwa Otta [18].

Struktura pracy jest następująca. Rozdziały 2 i 3 poświęcono kwestiom liniowości i nieliniowości w fizyce ostatnich kilku wieków i odkryciu zjawiska chaosu. W punkcie 4 omówiono istotę chaosu deterministycznego i jego występowanie w otaczającym nas świecie. Rozdział 5 ilustruje własności dynamiki chaotycznej na przykładzie konkretnego modelu matematycznego. Ta część pracy ma charakter bardziej formalny i może zostać pominięta przez Czytelnika niezainteresowanego szczegółami matematycznymi. Punkty 6 i 7 dotyczą pytań o kontrolowalność i powtarzalność eksperymentów w obliczu chaosu oraz o miejsce teorii liniowych w dzisiejszej nauce. Ostatni rozdział stanowi podsumowanie pracy i zawiera uwagi na temat kierunków dociekań w zakresie teorii chaosu i teorii złożoności.

2. Prymat determinizmu i liniowości

Pierre Simon de Laplace wierzył, że wszechświat podąża z góry zdeterminowanym, jednoznacznie określonym torem. Umysł, który znałby obecny stan wszechświata i wszelkie siły na niego działające oraz potrafiłby poddać te dane analizie, mógłby opisać ewolucję wszechświata jednym równaniem, „a przyszłość, podobnie jak przeszłość, miałby przed oczami” [22]. Laplace nie był osamotniony w swoich poglądach. Ich powszechność wynikała z sukcesów nauki w okresie, kiedy to za sprawą Newtona, d’Alamberta, Eulera, Lagrange’a, Fouriera i innych wielkich uczonych, stopniowo formułowano prawa rządzące światem fizycznym. W poczuciu, że coraz szerszy zakres zjawisk – ruch, ciepło, fale, dźwięk, światło – daje się okiełznać, tzn. opisać w języku matematyki, narodziła się koncepcja determinizmu skrajnie wyrażona przez Laplace’a.

W kontekście mechaniki klasycznej determinizm sprowadzał się do twierdzenia, iż równania dynamiki pozwalają jednoznacznie określić ruch układu, o ile tylko znane są warunki początkowe. Dziś wiadomo, że wrażenie to było oparte na sukcesach przybliżania pewnych prostych układów prostymi modelami. Fizyka newtonowska kreśliła mechanistyczny obraz świata – świata uporządkowanego, przewidywalnego, z zasady całkowicie znanego, a przede wszystkim liniowego. Przez wieki bowiem, wszędzie gdzie tylko było to możliwe, uczeni starali się opisywać zjawiska liniowymi równaniami różniczkowymi. Powód tych dążeń był *stricte* pragmatyczny – matematyka klasyczna nie dysponowała narzędziami do rozwiązywania problemów nieliniowych. Podstawowym orężem modelowania matematycznego stała się więc *linearyzacja*, która polegała na pomijaniu niewygodnych członów równań, uznanych jednocześnie za mało znaczące, bądź też na dalece upraszczających założeniach już na etapie formułowania równań. W efekcie teorie liniowe dotyczą *małych* drgań, *małych* odkształceń czy *małych* gradientów temperatury [22].

Klasyczna fizyka matematyczna była jednak bezradna w obliczu procesów nieuporządkowanych czy losowych. Z czasem obok niej musiała wyłonić się nowa metodologia modelowania, oparta na matematyce przypadku. Paradoksalnie również i tu istotną rolę odegrał determinizm. O ile nie potrafiono opisać złożonych układów, takich jak porcja gazu zawierająca miliony czy miliardy molekuł, o tyle podejrzewano, że za ową złożonością kryją się te same podstawowe, znane już prawa. Ponadto droga ku metodom statystycznym wiodła poprzez teorię prawdopodobieństwa, a do jej rozwoju przyczynili się uczeni mający wielki wkład w matematykę deterministyczną – przede wszystkim Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli czy w końcu Laplace [16, 22].

Podejście statystyczne, które wyrosło na gruncie obserwacji astronomicznych, pozwoliło zupełnie inaczej spojrzeć na świat fizyczny i reprezentujące go dane. W wieku XIX owe koncepcje przejęli przedstawiciele nauk społecznych, czyniąc ze statystyki naukę o masowych procesach losowych. Jednak nawet tu determinizm odciskał swe wyraźne piętno – wielu badaczy ludzkich spraw dało się uwieść laplace’owskiej idei: „wierzyli, że przyszłość społeczeństw jest czymś przewidywalnym” [16].

3. Nieliniowa rewolucja

U schyłku XIX wieku przekonano się, że w pewnych dziedzinach teorie liniowe po prostu nie działają. Punktem zwrotnym stała się rozprawa Henri Poincarégo, wybitnego matematyka, który rozważył – szczególnie istotny w mechanice nieba – *problem trzech ciał*, oddziałujących ze sobą zgodnie z prawem grawitacji Newtona. Chociaż Poincaré zbadał gruntownie przypadek uproszczony, gdy jedno ciało ma o wiele mniejszą masę

od dwóch pozostałych (tzw. zredukowany model Hilla), to dynamika układu okazała się niezwykle nieregularna. Wyglądało na to, że wszechświat jest dużo bardziej skomplikowany niż mechanizm zegarowy i nawet prosty model może uwidaczniać zadziwiająco złożone zachowania [22].

Jednak był to tylko nikły czubek nieliniowej rzeczywistości, o który potykała się ówczesna nauka. Wielki krok naprzód stał się możliwy dopiero w erze komputerów, które pozwoliły znaleźć przybliżone rozwiązania dla wielu złożonych problemów, w tym również tych nieliniowych. Na szczególną uwagę zasługuje postać Edwarda Lorenza, meteorologa z Massachusetts Institute of Technology (MIT), który na początku lat 60-tych zajmował się numerycznymi symulacjami zjawisk pogodowych, wykorzystując jeden z wczesnych komputerów. Zupełnie przypadkowo Lorenz zaobserwował wrażliwość użytego modelu matematycznego na niewielką zmianę warunków początkowych, co nazwał *efektem motyla*. Metaforycznie rzecz ujmując, trzepot skrzydeł motyla na Florydzie z biegiem czasu może spowodować tornado u wybrzeży Indonezji, albowiem dzisiejsza, nawet drobna zmiana w stanie atmosfery może ulec wzmocnieniu i prowadzić do gwałtownych ruchów mas powietrza w przyszłości. Na tego typu efekt nie byłoby miejsca w tradycyjnym, liniowym pojmowaniu rzeczywistości. Lorenz zrozumiał, że rozbieżność rozwiązań pod wpływem drobnego zaburzenia jest cechą uniwersalną nieliniowych układów dynamicznych w ogóle, toteż zbadał mocno uproszczony model pogody w postaci układu trzech równań różniczkowych, nie dbając o jego sens fizyczny. Przy pewnych wartościach parametrów (stałych w równaniach) natrafił na nieregularne i pozornie przypadkowe rozwiązania [8, 16, 22].

Pionierskie, topologiczne spojrzenie Poincarégo na nieliniowe układy dynamiczne oraz numeryczne eksperymenty Lorenza dały początek współczesnej *teorii chaosu*. Ogólna teoria zaczęła się stopniowo wyłaniać z licznych prac takich matematyków, jak Stephen Smale, Oleksandr Szarkowski czy Władimir Arnold [23]. Jednak zarówno ich wysiłki, jak i odkrycie Lorenza w dużej mierze pozostawały wówczas niezauważone. Paradoksalnie najpóźniej chaosem zainteresowali się sami fizycy, których uwagę przykuwały relatywistka i mechanika kwantowa – wyprzedzili ich inżynierowie, meteorolodzy, biologowie i ekonomiści [6]. Okazało się, że chaotyczność jest raczej normą niż wyjątkiem, co można zauważyć, jeśli tylko uwzględnić nieliniowość w modelach, czyniąc je bliższymi rzeczywistości.

4. Chaos a rzeczywistość

Jak już powiedziano, do początku XX wieku wypracowano dwie różne metodologie modelowania, w świetle których dany układ był albo deterministyczny, albo przypadkowy. Wykrycie chaosu deterministycznego wniosło do nauki nową, trzecią jakość. Określenie *chaos deterministyczny* może wywoływać pewnego rodzaju dysonans. W powszechnym rozumieniu słowo *chaos* oznacza przecież stan całkowitego nieporządku, bezładu, bez jakichkolwiek znamion zdeterminowania. Jednak w przypadku ściśle zdefiniowanego układu dynamicznego jego zachowanie nie może być dowolne, gdyż określają je równania deterministyczne. W języku modelowania matematycznego mówi się nawet o *prawach* czy *równaniach rządzących* danym zjawiskiem. Stąd miano *chaos deterministyczny* ma wyrażać nieregularną dynamikę, która cechuje układ deterministyczny – niejako wbrew jego naturze z założenia niestochastycznej.

By zaobserwować burzliwą dynamikę chaotyczną, nie trzeba badać złożonych zjawisk, takich jak turbulentny przepływ cieczy czy zderzenia atomów gazu. Oto prosty układ dynamiczny o kilku stopniach swobody może zachowywać się w sposób nieregu-

larny i tak skomplikowany, że trudno prognozować jego stan w przyszłości. Szczególnie przewidywania długookresowe stają się mało wiarygodne, a to za sprawą najważniejszej bodaj cechy układów nieliniowych – owej *wrażliwości na warunki początkowe*. Małe ich zaburzenie – z pozoru nic nieznaczące – prowadzi do dużych zmian zachowania układu, które w dodatku narastają wykładniczo z czasem. W dłuższej perspektywie, jako przejaw efektu motyla, obserwuje się zatem zupełnie inną jakościowo dynamikę [12, 15].

Jak pokazał Lorenz, układy nieliniowe są także czułe na zmianę wartości charakteryzujących je parametrów. Możliwe są tu tzw. *bifurkacje*, czyli nagłe, skokowe przejścia od dynamiki regularnej – okresowej lub prawie okresowej – do chaotycznej. Tym razem jakościowa zmiana zachowania całego układu może być wywołana drobną zmianą wybranego parametru, zwanego *parametrem kontrolnym* lub *bifurkacyjnym* [12, 15].

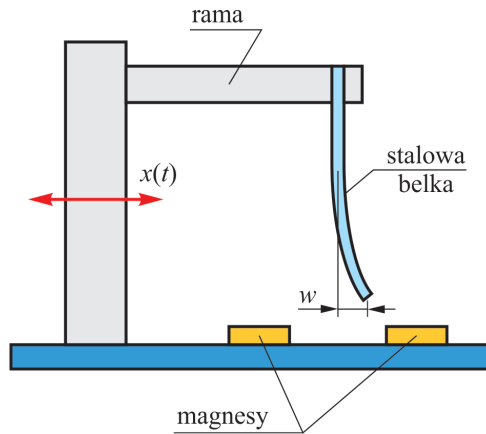
Na gruncie przedstawionych dotychczas informacji może pojawić się wątpliwość, czy chaos jest czymś realnym, mającym miejsce w świecie fizycznym. A może jest to tylko jakiś abstrakt, koncept czysto matematyczny, którego środowiskiem naturalnym jest rzeczywistość wyidealizowana i zamodelowana na potrzeby teorii i symulacji komputerowych? W istocie jest to pytanie o naturę modeli, a nawet praw przyrody, które formułują naukowcy i o to, na ile odzwierciedlają one rzeczywistość. Po pierwsze, należy pamiętać, że weryfikacja poprawności modelu bazuje właśnie na eksperymencie. W praktyce za przydatny uważa się tylko taki model, który pozwala uzyskać prognozy zgodne z rzeczywistością. Warto spojrzeć na tę kwestię z perspektywy zaprezentowanej przez Cohena i Stewarta [9]: nawet jeśli schematy, które – jak sądzimy – odkrywamy w przyrodzie, są „kalamburami umysłu”, tylko metaforami, a nie rzeczywistymi prawami, to jednak „są one schematami, które triumfują w pewnym wybranym kontekście”. Służą do opisu zjawisk, skutecznie przybliżając jakieś fundamentalne – być może niedostępne dla nas – prawa. Po drugie, skoro na przykład stosowany obecnie model przepływów atmosferycznych jest nieliniowym układem dynamicznym, to również pogodę uważa się za układ nieliniowy, z chaosem jako charakterystyczną cechą. Podobnie jak nieliniowe równania ruchu oscylatora są rezultatem nieliniowości rzeczywistego obiektu drgającego, zdolnego do nieregularnej dynamiki. Wydaje się, że chaotyczność modelu matematycznego – stosunkowo prostego, bo uchwytanego przez człowieka – musi być chociaż namiastką modelowanej, nieliniowej rzeczywistości.

Występowanie chaosu w otaczającym nas świecie potwierdzają liczne eksperymenty fizyczne. Kilka najbardziej sztarandowych opisał Addison [1], Ott [18] oraz Stewart [22], jak chociażby: doświadczenie Moona i Holmesa (1979) dotyczące belki, na którą działa pole magnetyczne; eksperyment Shawa (1984) z kapiącym kranem; zjawisko konwekcji Benarda-Rayleigha, które badali m.in. Ahlers i Behringer (1978), Gollub i Benson (1980). Ponadto warto wspomnieć o elektrycznym obwodzie Chuy, oscylacyjnej reakcji chemicznej Biełousowa-Żabotyńskiego oraz chaotycznej dynamice łożyskowanego wirnika. Już na podstawie tych przykładów można wnioskować, iż chaos objawia się w zachowaniu szerokiej gamy rzeczywistych układów. Do tej pory stwierdzono, że ma kluczowe znaczenie w wielu dziedzinach, np. w mechanice płynów, fizyce plazmy, technologiach półprzewodnikowych, obwodach elektrycznych, w biologii, chemii, akustyce, astronomii [12, 18].

5. Chaos w ujęciu matematycznym

5.1. Model matematyczny

Aby zilustrować opisane efekty nieliniowe, rozważymy drgania w układzie badanym doświadczalnie i na gruncie symulacji numerycznych przez Moona i Holmesa [17]. Przyrząd, którym się posłużyli, pokazano schematycznie na rys. 2. Jest to sztywna, stabilna rama, do której zamocowano stalową belkę. Jej swobodny koniec znajduje się między dwoma magnesami. Przyrząd jest tak skonstruowany, że rama wraz z belką może być poddawana drganiom harmonicznym w kierunku poziomym.



Rys. 2. Układ badany przez Moona i Holmesa (1979)

Jak łatwo się domyślić, w stanie spoczynku belka znajduje się w jednym z dwóch ustalonych położen równowagi – jej koniec zostaje odchylony w kierunku jednego z magnesów, na prawo lub na lewo. Jednak gdy wprowadzimy ramę w ruch sinusoidalny, można zaobserwować nieregularne i bardzo skomplikowane drgania belki.

Aby sprawdzić, czy takie zachowanie się układu jest przejawem chaosu (a nie innych efektów dynamicznych), Moon i Holmes skorzystali z prostego modelu matematycznego badanego układu – pojedynczego równania różniczkowego. Przedstawimy je w bezwymiarowej, tj. odpowiednio przeskalowanej, postaci jako

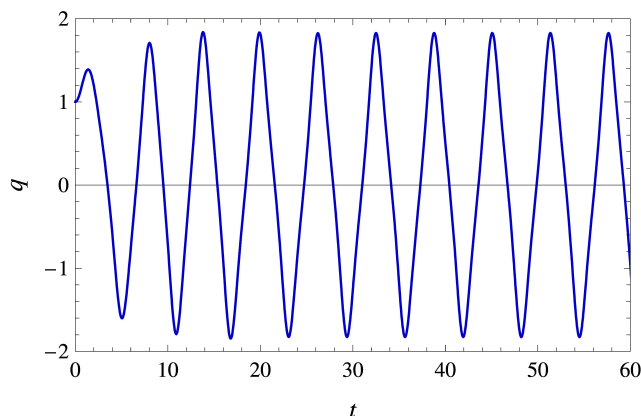
$$\ddot{q} + c\dot{q} - q + q^3 = A \sin \Omega t, \quad (1)$$

gdzie $\dot{q} = dq/dt$. Pierwsze dwa człony równania reprezentują bezwładność belki i tłumienie drgań. Kolejne wyrazy opisują siłę sprężystości i oddziaływanie magnesów. Człon wymuszający po prawej stronie odpowiada sterowanemu przesuwowi ramy. Zmienna q , podobnie jak w (zob. rys. 2), jest funkcją czasu opisującą maksymalne wychylenie belki, przy czym w wyniku przeskalowania nie ma już charakteru długości – jest wielkością bezwymiarową. Dla ustalonych, stabilnych położen równowagi belki $q = 1$ lub $q = -1$. Stała c odgrywa rolę współczynnika tłumienia, natomiast A i Ω to odpowiednio amplituda i częstość wymuszenia. Ponieważ zmienną niezależną t można traktować jako czas bezwymiarowy, wszystkie parametry układu również mają charakter bezwymiarowy.

Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie postawionego problemu, należy określić warunki początkowe dla ruchu końca belki:

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0, \quad (2)$$

gdzie q_0 i v_0 to zadane wartości określające odpowiednio wychylenie oraz prędkość w chwili $t = 0$.



Rys. 3. Drgania belki dla $\Omega = 1$ – przebieg czasowy $q(t)$

Równanie (1) stanowi szczególny przypadek *równania Duffinga* – jednego z podstawowych modeli nieliniowych, które można spotkać nie tylko w dziedzinie mechaniki [13]. Układ oscylujący opisany takim równaniem nazywa się *oscylatorem Duffinga*.

5.2. Stan dynamiczny układu

Omawiany układ ma jeden stopień swobody (liczba stopni swobody $s = 1$) związany ze zmieniającym się wychyleniem końca belki. Stan dynamiczny tego układu w dowolnej chwili t jest w pełni określony przez dwie wielkości: przemieszczenie q i prędkość $\dot{q}$. Wszystkie możliwe do pomyślenia stany układu tworzą $2s$ -wymiarową przestrzeń, zwaną *przestrzenią fazową* (inaczej *przestrzeń stanów*), która dla $s = 1$ redukuje się do płaszczyzny fazowej. Każdej chwili t ruchu układu odpowiada para $(q, \dot{q})$, czyli punkt na płaszczyźnie fazowej. Zbiór wszystkich takich punktów zaobserwowanych przy zmianie parametru t tworzy krzywą zwaną *trajektorią fazową*. Formalne definicje wymienionych pojęć zawarto m.in. w pracach [4, 7, 14].

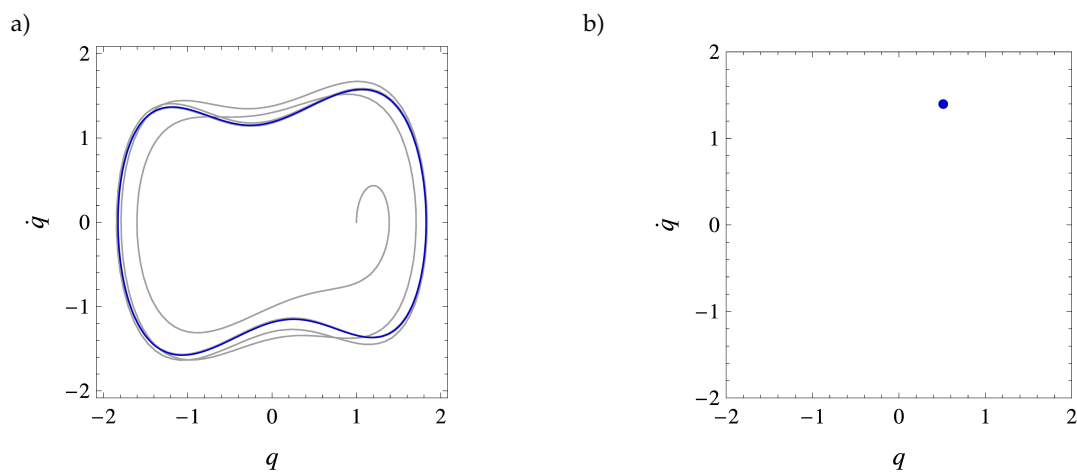
Wykres trajektorii fazowej na płaszczyźnie nazywa się *portretem fazowym*. Ruch układu obrazuje się również, stosując metodę zaproponowaną przez Poincarégo: na płaszczyźnie fazowej przedstawia się tylko niektóre punkty $(q, \dot{q})$ – zarejestrowane w jednakowych odstępach czasu, równych pewnemu, charakterystycznemu dla danego układu, okresowi T :

$$t = t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots$$

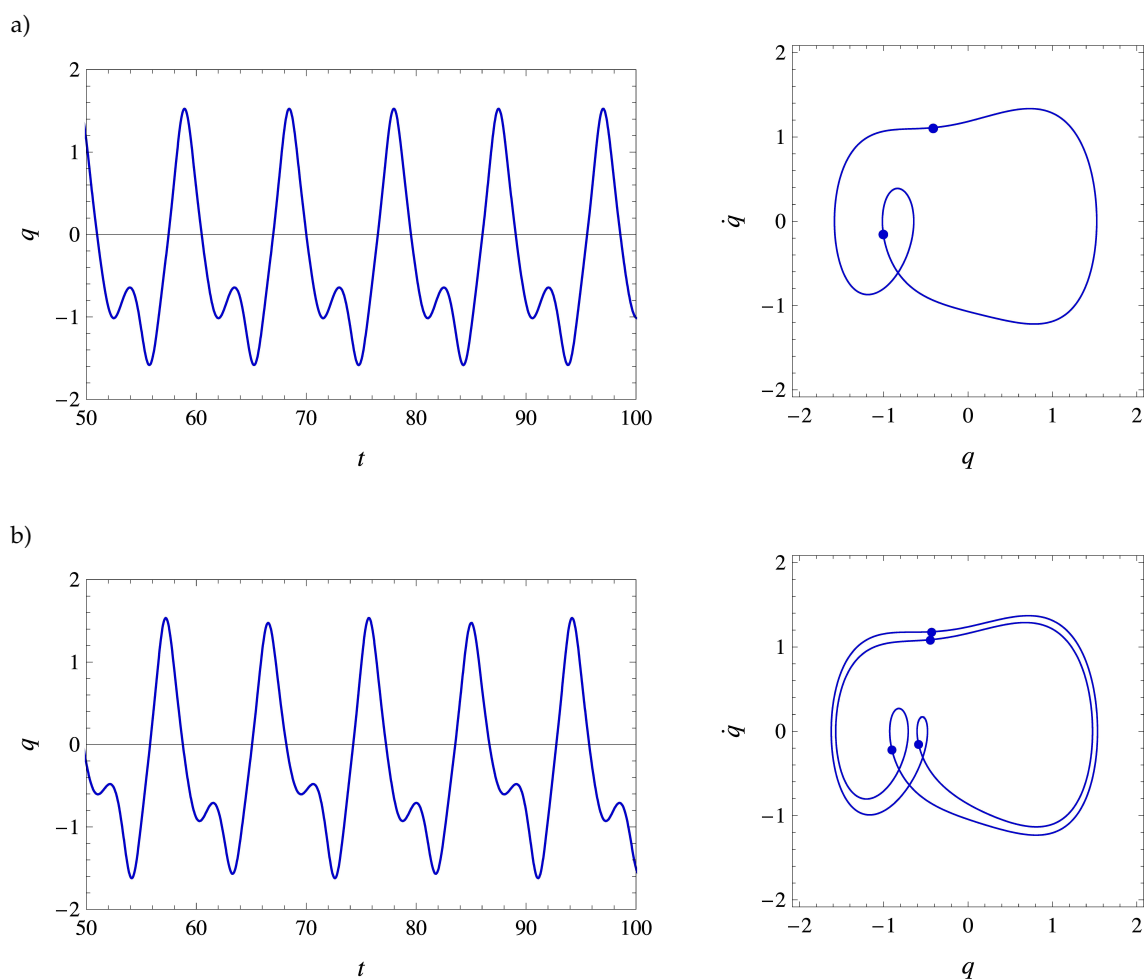
Czas t_0 jest tak dobrany, by pominąć wszelkie ruchy przejściowe układu. Taki stroboskopowy obraz dynamiki nazywa się *przekrojem Poincarégo* lub *mapą Poincarégo* [18, 24].

5.3. Droga do chaosu

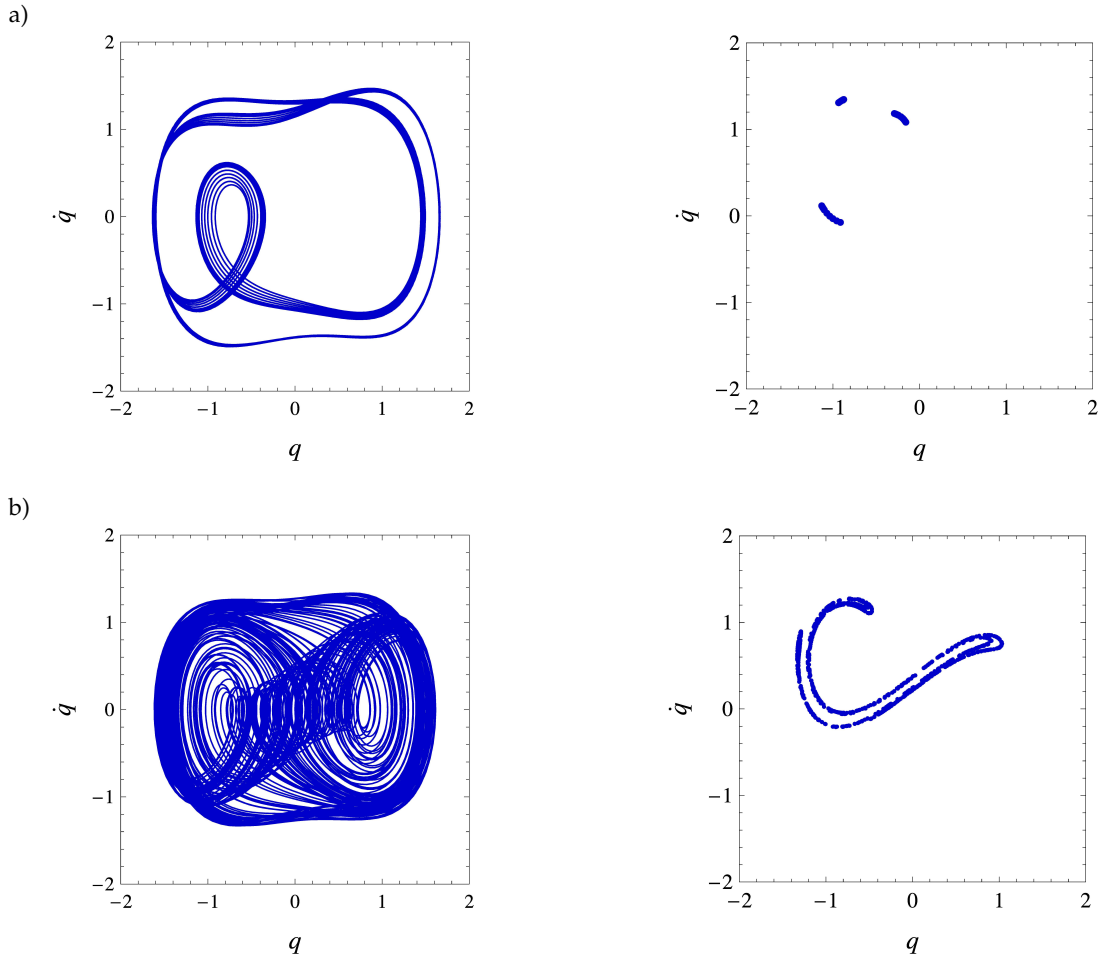
Rozważmy eksperyment numeryczny, w którym odchylamy wolny koniec belki, tak że $q_0 = 1$, natomiast początkowa prędkość $v_0 = 0$. Niech rama będzie wprowadzona w drgania o amplitudzie $A = 1$. Ponadto przyjmijmy $c = 0.5$. Celem symulacji jest obserwacja zmian jakościowych ruchu belki pod wpływem zmiany częstości Ω , traktowanej jako parametr kontrolny.



Rys. 4. Okresowe drgania belki dla $\Omega = 1$: a) portret fazowy – kolorem szarym zaznaczono fragment trajektorii odpowiadający ruchowi przejściowemu (nieustalonemu), b) mapa Poincarégo



Rys. 5. Okresowe drgania belki – przebieg czasowy oraz mapa Poincarégo nałożona na portret fazowy: a) $\Omega = 1.32$, b) $\Omega = 1.36$



Rys. 6. Prawie okresowe i chaotyczne drgania belki – portret fazowy oraz mapa Poincarégo: a) $\Omega = 1.19$, b) $\Omega = 1.4$

Na rysunku 3 przedstawiono wykres rozwiązania $q(t)$ dla $\Omega = 1$. Obejmuje on prawie 10 cykli wymuszenia, tj. okresów drgań ramy, $T = 2\pi/\Omega$. Pierwsze kilka cykli to faza przejściowa – ruch nieustalony belki, po którym następują drgania periodyczne o okresie równym T . W takim przypadku mówi się o drganiach $1T$ -okresowych. Odpowiadający im obraz na płaszczyźnie fazowej to pojedyncza pętla, do której początkowo zmierza trajektoria fazowa, a potem cyklicznie ją kreśli (zob. rys. 4a). Natomiast mapa Poincarégo obrazująca ruch $1T$ -okresowy zawiera jeden punkt (rys. 4b).

W miarę wzrostu częstości drgań ramy zmienia się zachowanie belki. Dla $\Omega = 1.32$ okres ruchu jej końca jest dwukrotnie dłuższy od okresu drgań ramy T . Są to więc drgania $2T$ -okresowe, co potwierdza zarówno trajektoria fazowa, jak i mapa Poincarégo (rys. 5a). Można powiedzieć, że – w stosunku do poprzedniego przypadku – trajektoria uległa rozdzieleniu i składa się teraz z dwóch pętli.

Owo rozdzielenie trajektorii określa się właśnie mianem bifurkacji. Idąc dalej wzdłuż osi parametru Ω , można uzyskać drgania $4T$ -okresowe (dla $\Omega = 1.36$, rys. 5b). Oczywiście charakter ruchu belki odpowiada pewnym przedziałom częstości, a nie tylko jej pojedynczym wartościom. Istnieją jednak tzw. *punkty bifurkacji*, czyli progowe wartości parametru, których przekroczenie wywołuje skokową zmianę w zachowaniu się ukła-

du. Co charakterystyczne, odległości kolejnych punktów bifurkacji gwałtownie maleją². Jeżeli obserwuje się ciąg bifurkacji, którego efektem są drgania układu z okresem kolejno

$$T, 2T, 4T, 8T, \dots$$

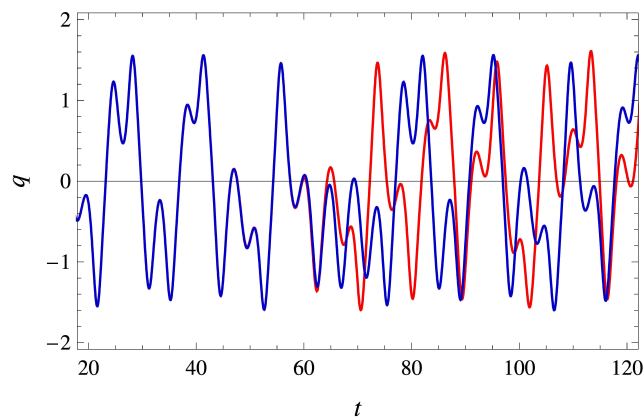
a w analizowanym zakresie parametru kontrolnego nie występują inne zmiany dynamiki, to mówi się o *kaskadzie podwajania okresu*. Jest to jedna z typowych dróg prowadzących do chaosu [4, 12, 24].

W omawianym przypadku droga ta jest mniej uporządkowana. Ponadto można natknąć podprzedziały, w którym występują drgania quasi-okresowe, cechujące się prawie powtarzalnością. Na przykład gdy $\Omega = 1.19$, trajektoria układu wypełnia fragment płaszczyzny fazowej w sposób dość regularny (rys. 6a). Można powiedzieć, że dla pewnych wartości parametru bifurkacyjnego trajektoria fazowa uległa rozszczepieniu, przy czym trudno jest wskazać krotność okresu podstawowego T . Z kolei dla $\Omega = 1.4$ zachowanie układu jest chaotyczne, pozbawione jakiegokolwiek regularności (rys. 6b). W każdym cyklu belka porusza się w inny, niepowtarzalny sposób i próżno szukać tu dwóch odcinków trajektorii pokrywających się na płaszczyźnie fazowej.

W dalszych przedziałach częstości Ω mogą następować kolejne zmiany w dynamice układu: przejście od drgań chaotycznych do regularnych (okresowych lub prawie okresowych), a następnie znów do chaotycznych itd. Podobne przejścia obserwuje się, kiedy Ω przyjmuje ustaloną wartość, a parametrem kontrolnym jest amplituda A .

5.4. Wrażliwość na warunki początkowe

Rozważmy wskazany już przypadek ruchu chaotycznego, gdy $\Omega = 1.4$ oraz $q_0 = 1$, $v_0 = 0$. Wyobraźmy sobie drugi eksperyment numeryczny przeprowadzony z nieznacznie różniącymi się warunkami początkowymi. Niech wychylenie belki w chwili $t = 0$ będzie równe $\tilde{q}_0 = q_0 + \varepsilon$, gdzie ε jest małą wielkością, np. $\varepsilon = 10^{-5}$. Prędkość początkową pozostawmy bez zmian, tj. $\tilde{v}_0 = 0$.



Rys. 7. Wrażliwość układu na warunki początkowe w przypadku drgań chaotycznych ($\Omega = 1.4$): przebieg czasowy rozwiązań przy zaburzonych (kolor czerwony) i niezaburzonych (kolor niebieski) warunkach początkowych

²Odległości te maleją w tempie geometrycznym, a prawidłowość tę odkrył fizyk Mitchell Feigenbaum. Więcej informacji na ten temat zawierają prace [9, 12, 22, 24]

Otrzymane przebiegi czasowe obu rozwiązań, $q(t)$ i $\tilde{q}(t)$, przedstawiono na rys. 7. W ciągu pierwszych kilkunastu cykli wymuszenia ruch końca belki jest identyczny, potem jednak zaczynają pojawiać się coraz wyraźniejsze różnice. W przypadku dynamiki chaotycznej rozbieżność dwóch początkowo bliskich trajektorii narasta wykładniczo z upływem czasu. Zatem małe zaburzenie warunków początkowych szybko przekształca się w kolosalną niepewność przewidywanego ruchu. Jak ujęli to Cohen i Stewart, „gdy w grę wchodzi chaos, »zaniedbywalne« różnice nie są już zaniedbywalne” [9]. Właśnie ten efekt określa się mianem wrażliwości układu na warunki początkowe [1, 12, 24].

5.5. Atraktory i fraktale

Gdy układ dynamiczny ewoluuje w czasie, trajektoria w przestrzeni stanów może zmierzać do pewnego podzbioru tej przestrzeni: punktu, krzywej, obszaru itp. Tego rodzaju obiekt geometryczny nazywa się *atraktorem*. Jak sama nazwa wskazuje, atraktor przyciąga znajdujące się blisko niego trajektorie, które rozpoczynają się w różnych punktach przestrzeni fazowej, w otoczeniu atraktora. Zbiór warunków początkowych, dla których trajektoria dąży do danego atraktora, zwany jest *obszarem przyciągania* lub *basenem przyciągania*. Układ dynamiczny może mieć kilka współistniejących atraktorów, przy czym każdy z nich ma swój basen przyciągania [4, 12, 15].

Na przykład portret fazowy na rys. 4a (podobnie jak na rys. 5) przedstawia atraktor okresowy – tzw. cykl graniczny, czyli krzywą cyklicznie kreśloną na płaszczyźnie fazowej przez trajektorie układu przy danych wartościach parametrów. Można jednak przypuszczać, że istnieje więcej punktów początkowych (q_0, v_0) poza parą (1, 0), dla których trajektoria zmierza do tego atraktora. Wszystkie takie punkty stanowią obszar przyciągania tego atraktora.

W przypadku quasi-okresowości postać atraktora komplikuje się (zob. rys. 6a). „W topologicznym obrazie ruch quasi-periodyczny wygląda jak spiralny ruch na torusie” [22], co jest nierozdzielnie związane z występowaniem co najmniej dwóch niewspółmiernych częstości drgań prawie okresowych [1]. Należy przy tym pamiętać, że pojęcie *torus* ma dość szerokie znaczenie w języku topologii, która jest przecież uogólnioną geometrią form i kształtów.

Jeszcze bardziej złożoną strukturą wyróżnia się zwykle *atraktor chaotyczny* (rys. 6b). Jego jakościowej oceny dokonuje się najczęściej na podstawie mapy Poincarégo. Atraktor chaotyczny charakteryzuje się tym, że dwie przyciągane przez niego trajektorie, znajdujące się od siebie w dowolnie małej, lecz niezerowej odległości, oddalają się od siebie wykładniczo z czasem [4]. Atraktor chaotyczny o skomplikowanej geometrycznie strukturze nazywa się *dziwnym atraktorem*, a jego złożoność rozpatruje się w kategoriach *geometrii fraktalnej*.

Trudno podać ścisłą definicję pojęcia *fraktal*, choć zostało ono wprowadzone w latach 70-tych przez matematyka Benoita Mandelbrota [14]. Jak piszą Bronshtejn i inni, „fraktale są zbiorami, niezależnie od konkretnej dynamiki, które wyróżnia jedna lub więcej cech, takich jak wystrzępienie, porowatość, złożoność i samopodobieństwo” [7]. Zatem fraktal to zbiór o nietrywialnej strukturze i naturalnym, nieregularnym wyglądzie, którego nie da się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej [15]. Kluczową jego cechą jest *samopodobieństwo*, co oznacza, że „część jest podobna do całości” [14] – w sensie dokładnym albo statystycznym. Innymi słowy, powiększony obraz części zbioru przedstawia głębsze struktury, wzorce, które są podobne do obrazu całości – stanowią jej powielenie w mniejszej skali. Dobrą tego ilustracją są tzw. *fraktale naturalne*, które z łatwością można odnaleźć w świecie przyrody: linie brzegowe, łańcuchy górskie, kontury chmur, drzewa, paprocie czy fale morskie [1, 22]. Natomiast wyidealizowane twory, ja-

kimi są fraktale matematyczne, zachowują samopodobną strukturę w nieskończonym ciągu powiększeń [1].

Specyfika fraktali wymusiła na matematykach uogólnienie pojęcia wymiaru. Koncepcję *wymiaru fraktalnego* trudno zrozumieć intuicyjnie, tym bardziej, że zazwyczaj przyjmuje on wartości ułamkowe. Jedynie w przypadku klasycznych figur geometrycznych wymiar fraktalny jest liczbą całkowitą. Więcej informacji na ten temat zawierają prace [1, 5, 7, 12, 14, 15].

Każdy dziwny atraktor jest fraktalem. Charakteryzujący jego geometrię wymiar ułamkowy jest ściśle związany z długookresowym zachowaniem układu – pozwala na przykład oszacować liczbę aktywnych stopni swobody układu dynamicznego. Również granice basenów przyciągania, należących do różnych atraktorów (nie tylko dziwnych), mogą mieć strukturę fraktalną [12, 15].

6. Niepewność z chaosu

Mówi się, że wiek XX przyniósł trzy wielkie rewolucje w dziedzinie fizyki – związane odpowiednio z teorią względności, mechaniką kwantową oraz teorią chaosu [3]. Dwie ostatnie każą spojrzeć na eksperyment – jego kontrolowalność i powtarzalność – zupełnie inaczej niż fizyka klasyczna.

Teoria kwantowa ukazała probabilistyczną naturę świata w mikroskali. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga nie da się precyzyjnie zmierzyć jednocześnie położenia i pędu cząstki. „W mechanice kwantowej nie występują punktowe cząstki z dobrze określonymi trajektoriami” [8] – można tu wyznaczać jedynie prawdopodobieństwo zdarzeń. Zatem na poziomie mikroskopowym nasza znajomość warunków początkowych jest zawsze niepełna, stąd trudno dokładnie przewidzieć przyszłość.

Według Jamesa Gleicka, autora książek o rozwoju nauki, „teoria kwantów wyeliminowała newtonowskie marzenie o kontrolowalnym procesie pomiarowym”, podczas gdy „chaos eliminuje laplace’owski wymysł o deterministycznej przewidywalności” [3]. Badając układ w skali makro, kwantową nieoznaczoność można zaniedbać, lecz nawet w warunkach laboratoryjnych trudno ustrzec się błędów pomiaru – szczególnie tych losowych, wynikających z różnego rodzaju zakłóceń. Z tego powodu mało prawdopodobne wydaje się chociażby zapewnienie identycznych warunków początkowych w kilku kolejnych doświadczalnych próbach. Bez trudu można wyobrazić sobie sytuację, kiedy to zaburzenie jest nawet pomijalnie małe w stosunku do dokładności przyrządu pomiarowego, jednak w przypadku chaotycznego zachowania układu nieliniowego błąd taki szybko narasta, co prowadzi do zupełnie innych wyników niż poprzednio. Dlatego właśnie należy rozróżnić pojęcia *determinizm* i *przewidywalność*, które nie są bynajmniej synonimami. Określenie *deterministyczny* oznacza zgodny z *prawami* czy *równaniami* wyprowadzonymi w oparciu o pewne założenia, niejako *fizyczny*, a niekoniecznie *przewidywalny*, *całkowicie poznawalny*. Osobliwe cechy dynamiki chaotycznej, na czele z wrażliwością na warunki początkowe, czynią przewidywalność czymś nieosiągalnym, przynajmniej w perspektywie długookresowej.

Chaos nastrocza podobnych trudności w dziedzinie obliczeń numerycznych, których dokładność jest ograniczona i ściśle związana z wewnątrzmaszynowym kodowaniem binarnym. Z wyjątkiem liczb całkowitych i niektórych ułamków, liczby rzeczywiste reprezentowane są w pamięci komputera w sposób niedokładny – z pewną skończoną precyzją. Stąd po pierwsze, wyniki obliczeń obarczone są *błędem wejścia* – nieuniknionym ze względu na tzw. wstępne zaokrąglenie danych wejściowych, które pierwotnie mogą być już obciążone np. błędami pomiaru. Co ważniejsze, podczas obliczeń powstają nowe

błędy, zwane *błędami zaokrągleń*. Są one rezultatem koniecznego zaokrąglania wyników cząstkowych i mogą ulegać akumulacji wraz ze wzrostem liczby operacji arytmetycznych wykonanych przez komputer [7].

Jeśli wziąć pod uwagę wrażliwość układu na niewielkie zaburzenia parametrów, czy możemy być pewni, że – rozwiązując numerycznie równania ruchu – wyznaczyliśmy tę właściwą trajektorię układu? Być może otrzymane wyniki są artefaktami procedury obliczeniowej, a na pewno zależą od niej w sposób krytyczny. Zatem jak ocenić ich obiektywną prawdziwość? Trudno odpowiedzieć na te pytania w sposób ogólny, w większości przypadków jednak obliczona trajektoria wiernie przybliża pewną trajektorię układu. Innymi słowy, trajektoria wyznaczona numerycznie może nie być dokładnie tą, o którą nam chodzi, ale jest bardzo bliska którejś z możliwych, rzeczywistych trajektorii danego układu fizycznego [12].

Warto przy tym zauważyć, że badając doświadczalnie lub numerycznie zachowania chaotyczne, rzadko poszukujemy jakiejś jednej, konkretnej trajektorii – najczęściej jesteśmy zainteresowani pewnymi uśrednionymi własnościami. Skupiamy się więc na cechach, które są odporne na małe zmiany parametrów, np. topologia atraktora lub jego wymiar fraktalny. Uzyskane rezultaty odzwierciedlają charakter zachowania układu, jeśli tylko podążamy za jedną z możliwych trajektorii tegoż układu [12].

7. Miejsce liniowości

Skoro nieliniowość jest tak powszechna w otaczającej nas rzeczywistości, to powstaje pytanie o znaczenie teorii liniowych w świecie nauki. W szczególności, gdzie upatrywać miejsca we współczesnej mechanice dla liniowej teorii drgań? Czy jej nauczanie dzisiaj ma jeszcze sens?

Po pierwsze, teoria drgań układów liniowych znajduje wciąż zastosowanie w praktyce naukowej i inżynierskiej. Metody analizy układów liniowych są dobrze opracowane, przejrzyste i niezawodne. Ze względu na łatwość ich stosowania często dokonuje się linearyzacji, zastępując elementy nieliniowe ich modelem liniowym. Przybliżenie takie jest uzasadnione w przypadku małych nieliniowości i małych drgań, występujących w rzeczywistym układzie. Mimo uproszczeń otrzymuje się wtedy dobre przedstawienie własności dynamicznych i wystarczająco dokładne wyniki, niezbędne na przykład do podjęcia decyzji projektowych. Posługiwanie się modelami nieliniowymi ma miejsce tylko wtedy, gdy okazuje się to absolutnie nieodzowne [2, 4, 15].

Po drugie, układy nieliniowe przejawiają zachowania typowe dla układów liniowych. Jak zilustrowano na przykładzie, drgania chaotyczne obserwuje się tylko w pewnych zakresach parametrów układu. Zwykle możliwy jest taki dobór wartości parametrów, który prowadzi do drgań regularnych, w tym okresowych. Takie podejście było zresztą powszechnie stosowane przez ostatnie kilkadziesiąt lat, by wyeliminować niekorzystne zjawisko chaosu w dynamice projektowanych konstrukcji [11, 15].

I w końcu po trzecie, znajomość teorii drgań liniowych jest podstawą zrozumienia drgań nieliniowych. W praktyce dydaktycznej o specyfice układów nieliniowych mówi się poprzez zaprzeczenie – akcentując kontrast w stosunku do prostoty układów liniowych. Naucza się na przykład, że nieliniowość oznacza odpowiedź nieproporcjonalną do wymuszenia; że w analizie drgań nieliniowych nie ma zastosowania zasada superpozycji; że w zachowaniu układów nieliniowych mogą występować *rezonanse ultra-* i *subharmoniczne*; że pojawiają się tu zjawiska *przeskoku*, *histerezy*, a przede wszystkim chaosu, zupełnie nieznane na gruncie układów liniowych [2]. Taki porządek nauczania wydaje się jak najbardziej prawidłowy, gdyż prowadzi od prostoty i regularności ku wyrafino-

wanej złożoności, od wyidealizowanego przypadku szczególnego do ogólnego, bardziej naturalnego.

Przywołane tu argumenty przeczą, jakoby dynamika nieliniowa całkowicie przesłoniła liniową teorię drgań, a nawet odesłała ją do lamusa. W nieregularności i pozornej przypadkowości można doszukać się wzorców, uporządkowania, a także namiastki liniowości.

8. Podsumowanie

Świat jest z natury nieliniowy i jako taki jest miejscem, gdzie – oprócz regularności i przypadkowości – występuje chaotyczność. Ta ostatnia od losowości różni się tym, że cechuje układy deterministyczne. Istotą chaosu deterministycznego jest wrażliwość na warunki początkowe, co czyni ewolucję układu właściwie nieprzewidywalną. Zachowania chaotyczne przejawia ogromna liczba rzeczywistych i wyidealizowanych układów spotykanych w rozmaitych dziedzinach życia. W ten oto zwięzły sposób można by podsumować i zakończyć niniejszą pracę, gdyby nie jedno istotne pytanie: co mają ze sobą wspólnego układy mechaniczne, obwody elektryczne, systemy biologiczne, ekonomiczne i inne? Dlaczego w chaotycznej dynamice większości zbadanych układów, bez względu na ich charakter, odnaleźć można te same własności, prawidłowości czy wzorce?

Odpowiedzi na te i podobne pytania poszukuje *teoria złożoności*. Trudno wskazać konkretnie moment jej narodzin, ale na pewno był on pokłosiem ożywionego rozwoju dynamiki nieliniowej. O ile teoria chaosu zwrócona jest ku dynamicznej złożoności generowanej przez proste reguły ujęte w równaniach, o tyle teoria złożoności skupia się na czymś zgoła przeciwnym – na prostych rezultatach działania układów złożonych [10]. Prawdą jest bowiem, że chaos bywa cechą zaskakująco prostych układów. Jeszcze bardziej jednak zadziwia fakt, że z gmatwaniny trajektorii wyłaniają się prawidłowości i obraz uporządkowania. W języku teorii złożoności owo wyłanianie się pewnych własności i zjawisk nosi nazwę *emergencji*. „Emergentne rodzaje prostoty »załamują chaos«; wprowadzają porządek do układu, który zdaje się beznadziejnie pławić w morzu przypadkowych fluktuacji” [9]. Emergentną własnością można nazwać atraktor chaotyczny o samopodobnej strukturze fraktalnej. Innym przykładem jest kaskada podwajania okresu i geometryczne tempo malenia odległości pomiędzy kolejnymi punktami bifurkacji. Cechy te, ze względu na powszechność i niezależność od szczegółowej struktury systemu, określa się jako *własności uniwersalne* czy *uniwersalia* chaosu [1, 9, 12].

Co prawda zdajemy sobie sprawę, że „złożoność ma swoje własne prawa – lecz na razie nie rozumiemy ich zbyt dobrze” [9]. Ich wyjaśnienie z pewnością wymaga wykroczenia poza szczegółowe przewidywania dokonywane dla konkretnych układów na podstawie fundamentalnych praw. Potrzeba tu innego, bardziej ogólnego i holistycznego podejścia, połączonego ze świadomością, że złożoność jest zasadniczą częścią otaczającego nas świata [10, 12]. Taki punkt widzenia prezentuje chociażby Santa Fe Institute (SFI), założony w 1984 roku, by „odkrywać mechanizmy, które leżą u podstaw głębokiej prostoty obecnej w naszym złożonym świecie” [20].

Zmiany w podejściu do problematyki chaosu i złożoności zachodzą również na gruncie inżynierii. Jeszcze do niedawna wydawało się, że chaos jest niekorzystny i kompletnie nieprzydatny z racji nieprzewidywalności i dużej podatności na niewielkie zakłócenia. Okazuje się jednak, że chaotyczność układów może być niezwykle użyteczna, m.in. ze względu na dużą elastyczność zachowań [11]. W ostatnich dwóch dekadach powstały nowe metody sterowania układami chaotycznymi, jak choćby ta, którą opracowali Ott, Grebogi i Yorke [19]. Technikę tę zastosowano na przykład do wygładzania ruchu wzbu-

rzanej cieczy, sterowania nieregularnym biciem serca i falami elektrycznymi w mózgu [11, 14]. Z całą pewnością pytanie „jak uniknąć chaosu?” inżynierowie coraz częściej będą zastępować nowym i dociekliwym: „jak kontrolować chaos i skutecznie go wykorzystać?”.

Literatura

1. Addison P.S., *Fractals and Chaos: An illustrated course*. Institute of Physics Publishing, London, 1997.
2. Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J.T., *Drgania układów fizycznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008.
3. Aubin D., Dahan-Dalmedico A., Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures. *Historia Mathematica*, 29(3): 273-339, 2002.
4. Awrejcewicz J., *Drgania deterministyczne układów dyskretnych*. WNT, Warszawa 1996.
5. Awrejcewicz J., *Tajemnice nieliniowej dynamiki*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.
6. Baranger M., *Chaos, Complexity, and Entropy. A physics talk for non-physicists*. <http://www.necsi.edu/projects/baranger/cce.pdf>.
7. Bronsztejn I.N., Siemiendajew K.A., Musiol G., Mühlig H., *Nowoczesne kompendium matematyki*. PWN, Warszawa 2009.
8. Charap J.M., *Objaśnianie wszechświata. Fizyka w XXI wieku*. Prószyński i S-ka, Warszawa 2005.
9. Cohen J., Stewart I., *Załamane chaosu. Odkrywanie prostoty w złożonym świecie*. Prószyński i S-ka, Warszawa 2005.
10. Complexity Pages. <http://complexity.orconhosting.net.nz/index.html>.
11. Ditto W.L., Pecora L.M., Mastering Chaos. *Scientific American*, August 1993.
12. Hilborn R.C., *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, New York, 2000.
13. Kovacic I., Brennan M.J., *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Wiley, 2011.
14. Kudrewicz J., *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 2007.
15. Łuczko J., *Drgania regularne i chaotyczne w nieliniowych układach mechanicznych*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2008.
16. Młodinow L., *Matematyka niepewności. Jak przypadki wpływają na nasz los*. Prószyński i S-ka, Warszawa 2009.
17. Moon F.C., Holmes P.J., A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 65(2): 275-296, 1979.
18. Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*. WNT, Warszawa 1997.
19. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A., Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, 64(11): 1196-1199, 1990.
20. Santa Fe Institute, <http://www.santafe.edu/>
21. Smith L.A., *Chaos: A Very Short Introduction*. Oxford University Press, New York 2007.
22. Stewart I., *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*. PWN, Warszawa 1994.
23. Stewart I., *Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki*. Prószyński i S-ka, Warszawa 2009.
24. Taylor J.R., *Mechanika klasyczna*, tom 2. PWN, Warszawa 2006.