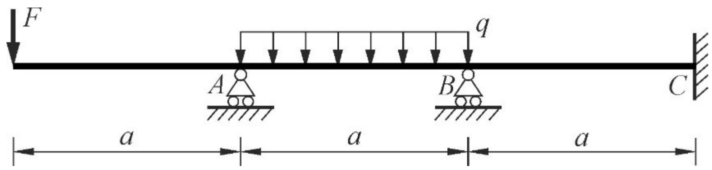
Wieloprzęsłowe belki statycznie niewyznaczalne

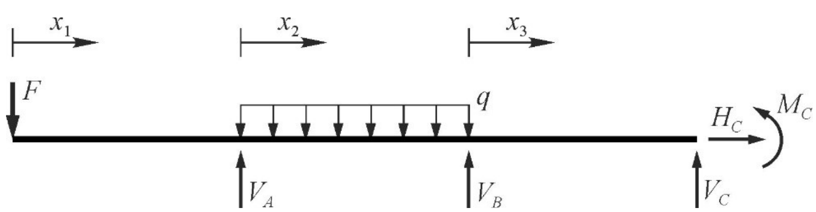


<u>Oznaczenia</u>

E – moduł Younga
J_z – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej
$y(x)$ – funkcja linii ugięcia belki
$M(x)$ – moment gnący
U – energia odkształcenia sprężystego belki
H_P, V_P – pozioma i pionowa reakcja w punkcie P
M_P – moment reakcyjny w punkcie P

I. Reakcje i przemieszczenia

1. Uwolnij układ od więzów. Podziel belkę na elementarne przedziały oraz wprowadź lokalne współrzędne $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



2. Napisz **równania równowagi statycznej**. Niech n_S będzie liczbą tych równań, natomiast n_R – liczbą wszystkich reakcji. Liczba **reakcji hiperstatycznych** (nadliczbowych) wynosi $n_X = n_R - n_S$.
3. Podziel reakcje na dwie grupy: reakcje podstawowe ($R_1, R_2, \ldots, R_{nS}$) i reakcje nadliczbowe ($X_1, X_2, \ldots, X_{nX}$).
4. Zapisz wyrażenia na **moment gnący** w każdym z przedziałów:

$$M_i(x_i) = \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

5. Zdefiniuj **energię sprężystą** od zginania dla całego układu:

$$U = \frac{1}{2EJ_z}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{Li} M_i^2(x_i)\,\mathrm{d}x_i\right]$$

6. Jeśli U zawiera reakcje podstawowe, rozwiąż równania równowagi ze względu na te reakcje i podstaw rozwiązanie do wyrażenia na energię U.

7. Sformułuj n_X dodatkowych równań, stosując **twierdzenie Menabrea**:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n_X$$

8. Rozwiąż układ wszystkich równań, aby wyznaczyć wszystkie reakcje.
9. Przemieszczenia (ugięcie lub kąt ugięcia belki) odpowiadające obciążeniom (zewnętrzne siły skupione lub momenty) można obliczyć bezpośrednio z **twierdzenia Castigliano**:

$$y_F = \frac{\partial U}{\partial F} \qquad \theta_M = \frac{\partial U}{\partial M}$$

10. Aby znaleźć przemieszczenie w dowolnym punkcie belki, wprowadź **siłę fikcyjną** F_0 (lub **moment fikcyjny** M_0). Uzupełnij wyrażenia na momenty gnące i zapisz energię odkształcenia sprężystego:

$$\hat{M}_i(x_i) = \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\hat{U} = \frac{1}{2EJ_z} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{Li} \hat{M}_i^2(x_i)\, \mathrm{d}x_i \right]$$

Następnie zastosuj twierdzenie Castigliano:

$$y_{F_0} = \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial F_0} \right|_{F_0 = 0} \qquad \theta_{M_0} = \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial M_0} \right|_{M_0 = 0}$$

II. Linia ugięcia belki

1. Skorzystaj z reakcji podpór, współrzędnych lokalnych, równań statyki i wyrażeń na momenty gnące wprowadzonych/zdefiniowanych w punktach I.1-I.4.
2. Dla każdego przedziału zapisz **różniczkowe równanie ugięcia belki**:

$$EJ_z y_i''(x_i) = M_i(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

3. Scałkuj te równania dla wszystkich przedziałów, aby uzyskać kąt ugięcia $\theta = y'$ oraz ugięcie y:

$$y_i'(x_i) = \frac{1}{EJ_z} \int M_i(x_i)\, \mathrm{d}x_i + C_i, \qquad y_i(x_i) = \frac{1}{EJ_z} \iint M_i(x_i)\, \mathrm{d}x_i + C_i x_i + D_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Stałe całkowania C_i, D_i są dodatkowymi niewiadomymi. Liczba tych stałych: $n_{SC} = 2n$.

4. Sformułuj **warunki brzegowe** dotyczące ugięcia y i kąta ugięcia θ, na przykład

$$y_1(a) = 0, \quad \ldots, \quad y_3(a) = 0, \quad \theta_3(a) = 0$$

5. Sformułuj **warunki ciągłości** dotyczące ugięcia y i kąta ugięcia θ, na przykład

$$y_1(a) = y_2(0), \quad \ldots, \quad \theta_1(a) = \theta_2(0)$$

6. Rozwiąż układ równań złożony z równań równowagi oraz warunków brzegowych i ciągłości, aby wyznaczyć wszystkie reakcje i stałe całkowania.
7. Przemieszczenia (ugięcie lub kąt ugięcia belki) można obliczyć na podstawie wyrażeń na ugięcie lub kąt ugięcia w danym przedziale belki. Podobnie można przedstawić graficznie linię ugięcia belki.