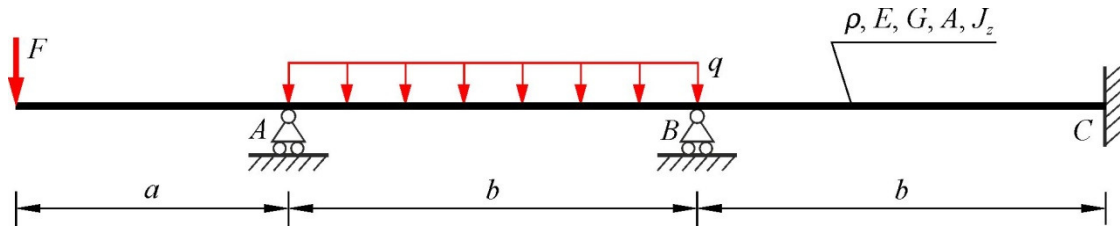


Metoda sztywnych elementów skończonych (MSES) dla belek wieloprzęsłowych



Oznaczenia

ρ – gęstość materiału belki

E, G – moduł Younga i moduł Kirchhoffa materiału belki

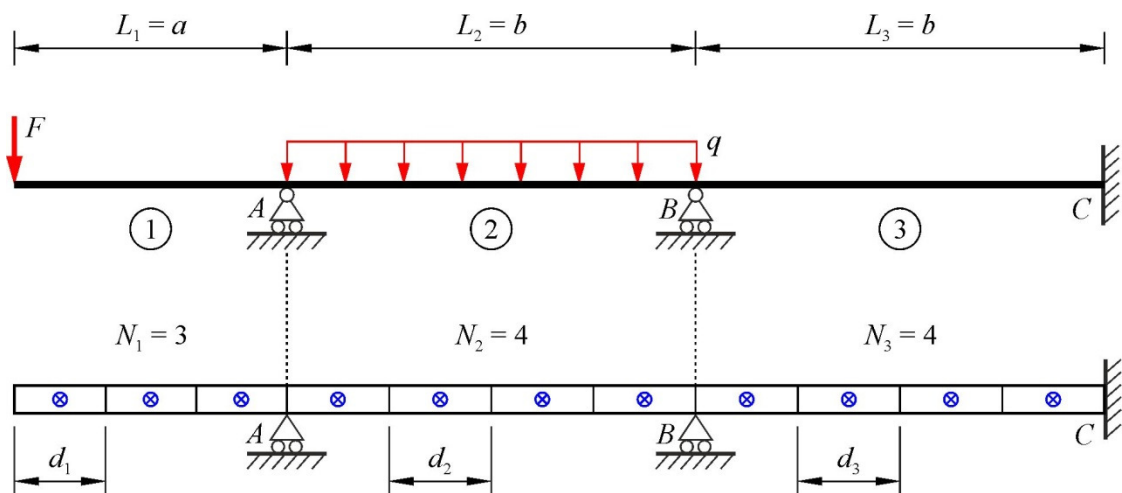
A, J_z – pole powierzchni przekroju poprzecznego belki i jego moment bezwładności względem osi obojętnej

n – liczba przedziałów belki

I. Ugięcie statyczne belki

- Podziel belkę na elementarne przedziały (1, 2, ..., n) oraz zdefiniuj ich długości L_p (dla $p = 1, 2, \dots, n$), np.

$$L_1 = a, \quad L_2 = L_3 = b$$



- Wykonaj **podział pierwotny belki** – dla każdego przedziału określ liczbę podprzedziałów (N_1, N_2, \dots, N_n) i długość tych segmentów, tj. $d_p = L_p/N_p$ (dla $p = 1, 2, \dots, n$). W środku każdego segmentu umieść **element sprężysty (ES)**. Zdefiniuj liczbę elementów sprężystych:

$$N_{ES} = \sum_p N_p$$

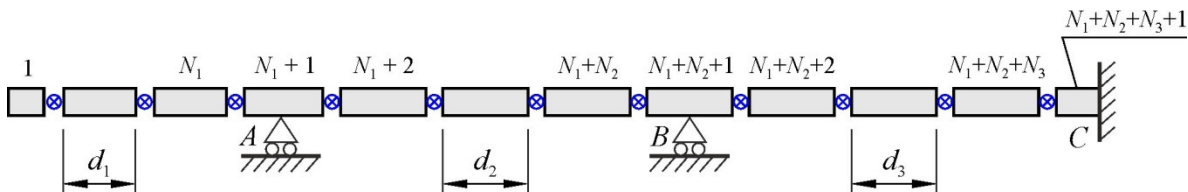
3. Dla każdego przedziału (złożonego z jednakowych segmentów) zdefiniuj zestaw **współczynników sztywności**, uwzględniając rozciąganie (n), ścinanie (t) i zginanie (g):

$$k_p^{(n)} = \frac{EA}{d_p}, \quad k_p^{(t)} = \frac{GA}{\beta d_p}, \quad k_p^{(g)} = \frac{EJ_z}{d_p},$$

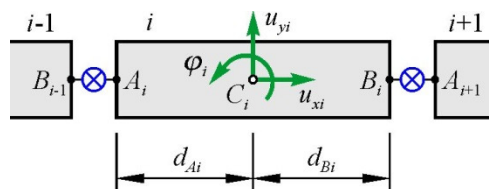
gdzie β – współczynnik kształtu przekroju poprzecznego belki.

4. Wykonaj **podział wtórny belki** – pomiędzy elementy sprężyste wstaw **sztywne elementy skończone (SES)**. Wprowadź numerację SES z użyciem liczby segmentów (N_1, N_2, \dots, N_n). Zdefiniuj liczbę wszystkich elementów i liczbę stopni swobody układu:

$$N_{\text{SES}} = \sum_p N_p + 1 = N_{\text{ES}} + 1, \quad N_{\text{ss}} = 3N_{\text{SES}}.$$



5. Dla każdego SES zdefiniuj odległości między środkiem masy (C_i) a końcami elementu (A_i, B_i):



- elementy regularne, np.

$$d_{Ai} = d_{Bi} = \frac{d_1}{2} \quad (i = 2, 3)$$

$$d_{Ai} = d_{Bi} = \frac{d_2}{2} \quad (i = N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2)$$

- elementy końcowe, np.

$$d_{Ai} = d_{Bi} = \frac{d_1}{4} \quad (i = 1)$$

$$d_{Ai} = d_{Bi} = \frac{d_3}{4} \quad (i = N_{\text{SES}})$$

- elementy wspólne dla sąsiadujących przedziałów (C_i nie musi być środkiem masy SES $_i$), np.

$$d_{Ai} = \frac{d_1}{2}, \quad d_{Bi} = \frac{d_2}{2} \quad (i = N_1 + 1)$$

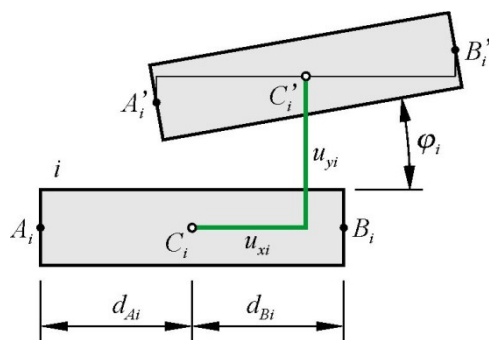
$$d_{Ai} = \frac{d_2}{2}, \quad d_{Bi} = \frac{d_3}{2} \quad (i = N_1 + N_2 + 1)$$

6. Zdefiniuj **wektor współrzędnych uogólnionych** całego układu:

$$\mathbf{q} = [u_{x1}, u_{y1}, \varphi_1, u_{x2}, u_{y2}, \varphi_2, \dots, u_{xN_{\text{SES}}}, u_{yN_{\text{SES}}}, \varphi_{N_{\text{SES}}}]^T$$

7. Zapisz **przemieszczenia translacyjne końców SES** w funkcji współrzędnych uogólnionych (przy założeniu małych przemieszczeń):

$$u_{xAi} = u_{xBi} \approx u_{xi}, \quad u_{yAi} \approx u_{yi} - d_{Ai} \varphi_i, \quad u_{yBi} \approx u_{yi} + d_{Bi} \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N_{\text{SES}})$$



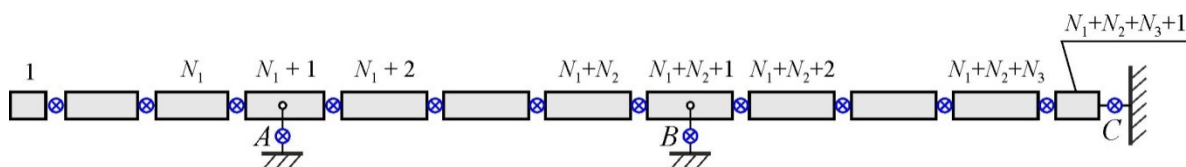
8. Aby **zamodelować podpory**, wprowadź dodatkowe elementy sprężyste i zdefiniuj dla nich współczynniki sztywności, np.

$$k_A^{(n)} = \gamma k_1^{(n)}, \quad k_A^{(t)} = \gamma k_1^{(t)}, \quad k_A^{(g)} = 0, \quad (\text{podpora A})$$

$$k_B^{(n)} = \gamma k_2^{(n)}, \quad k_B^{(t)} = \gamma k_2^{(t)}, \quad k_B^{(g)} = 0, \quad (\text{podpora B})$$

$$k_C^{(n)} = \gamma k_3^{(n)}, \quad k_C^{(t)} = \gamma k_3^{(t)}, \quad k_C^{(g)} = \gamma k_3^{(g)} \quad (\text{podpora C})$$

przy czym współczynnik $\gamma \approx 2 \div 5$.



9. Zdefiniuj **energię potencjalną** (sprężystości) całego układu:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N1} \left[k_1^{(n)} (u_{xA_{i+1}} - u_{xB_i})^2 + k_1^{(t)} (u_{yA_{i+1}} - u_{yB_i})^2 + k_1^{(g)} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right] + \dots + V_w,$$

gdzie V_w jest energią wynikającą z więzów (podpór), np.

$$V_w = \frac{1}{2} \left[k_A^{(n)} u_{xN1+1}^2 + k_A^{(t)} u_{yN1+1}^2 + k_A^{(g)} \varphi_{N1+1}^2 \right] + \dots$$

10. Wyznacz **wektor pochodnych energii potencjalnej** względem współrzędnych uogólnionych, a następnie **macierz sztywności** układu:

$$\mathbf{g} = [g_i] = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$$

$$g_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\mathbf{K} = [k_{ij}]$$

$$k_{ij} = \text{coef}(g_i, q_j)$$

11. Zdefiniuj **wektor sił uogólnionych** (zewnętrznych) układu:

$$\mathbf{Q} = [F_{x1}, F_{y1}, M_1, F_{x2}, F_{y2}, M_2, \dots, F_{xNSES}, F_{yNSES}, M_{NSES}]^T$$

12. Rozwiąż **układ liniowych równań algebraicznych** ze względu na przemieszczenia:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

II. Drgania swobodne belki

1. Dla każdego SES określ **masę i masowy moment bezwładności** względem punktu środkowego (C_i):
 - elementy regularne i końcowe (C_i jest środkiem masy SES_i), np.

$$m_i = \rho A d_{ABi}, \quad I_i = \frac{m_i}{12} (d_{ABi}^2 + h^2) \quad (i \neq N_1 + 1, \quad i \neq N_1 + N_2 + 1)$$

$$d_{ABi} = d_{Ai} + d_{Bi}$$

- elementy wspólne dla sąsiadujących przedziałów (w ogólności C_i nie jest środkiem masy SES_i), np.

$$m_i = \rho A d_{ABi}, \quad I_i = \frac{m_i}{12} (d_{ABi}^2 + h^2) + m_i r_i^2 \quad (i = N_1 + 1, \quad i = N_1 + N_2 + 1)$$

$$d_{ABi} = d_{Ai} + d_{Bi}, \quad r_i = \frac{d_{Bi} - d_{Ai}}{2}$$

gdzie h – wysokość przekroju poprzecznego belki.

2. Zdefiniuj **wektor bezwładności** układu, tj. wektor zawierający **współczynniki bezwładności** (leżące na głównej przekątnej macierzy bezwładności \mathbf{M}):

$$\mathbf{m} = [m_1, m_1, I_1, m_2, m_2, I_2, \dots, m_{NSES}, m_{NSES}, I_{NSES}]^T$$

3. Wyznacz **zmodyfikowaną macierz sztywności**:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K},$$

czyli i -ty wiersz macierzy sztywności podziel przez i -ty element wektora bezwładności \mathbf{m} .

4. Rozwiąż zagadnienie własne macierzy \mathbf{K}_M :

$$(\mathbf{K}_M - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, N_{ss}),$$

gdzie:

\mathbf{I} – macierz jednostkowa ($N_{ss} \times N_{ss}$),

λ_i – wartość własna (i -ta) macierzy \mathbf{K}_M ,

\mathbf{a}_i – wektor własny macierzy \mathbf{K}_M , odpowiadający i -tej wartości własnej.

Rezultatem obliczeń będzie **wektor wartości własnych** i **macierz modalna**, której kolumnami są odpowiednie wektory własne:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{ss}}]^T, \quad \boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{N_{ss}}]$$

5. Dokonaj interpretacji fizycznej otrzymanego rozwiązania:

- i -ta wartość własna jest kwadratem i -tej **częstości drgań własnych** układu:

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

- i -ty wektor własny stanowi i -tą **postać drgań własnych układu**, czyli \mathbf{a}_i jest wektorem amplitud względnych dla poszczególnych współrzędnych uogólnionych, odpowiadającym częstości własnej ω_i :

$$\mathbf{a}_i = [a_{x1}^{(i)}, a_{y1}^{(i)}, a_{\phi1}^{(i)}, a_{x2}^{(i)}, a_{y2}^{(i)}, a_{\phi2}^{(i)}, \dots, a_{xNSES}^{(i)}, a_{yNSES}^{(i)}, a_{\phiNSES}^{(i)}]^T$$